ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK TENGLAMASIDA VAQTGA BOG‘LIQ KOEFFITSIYENTNI ANIQLASHNING TESKARI MASALASI

Narboyev Sherali Shixnazarovich

Osiyo Xalqaro universiteti magistranti

ANNOTATSIYA

Ushbu tezisda bir o‘lchamli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasidagi vaqtga bog‘liq noma'lum issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentini aniqlash bo‘yicha teskari masala o‘rganiladi. Qo‘shimcha ma'lumot sifatida jismdagi to‘liq issiqlik miqdorini ifodalovchi integral shart olinadi. Masala noma'lum koeffitsiyentga nisbatan ikkinchi tur nochiziqli Volterra integral tenglamasiga keltiriladi, yechimning yetarlicha kichik vaqt oralig‘ida mavjudligi va yagonaligi haqidagi tasdiqlar bayon etiladi. Koeffitsiyentni sonli tiklash uchun oshkormas ayirmali sxema va har bir vaqt qadamida iteratsiyaga asoslangan algoritm taklif qilinadi. Test misolida hisoblash natijalari keltirilib, usulning yaqinlashishi va o‘lchash xatoliklariga nisbatan turg‘unligi ko‘rsatiladi.

Kalit so‘zlar: *issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, teskari masala, vaqtga bog‘liq koeffitsiyent, integral qo‘shimcha shart, Volterra integral tenglamasi, mavjudlik va yagonalik, ayirmali sxema.*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется обратная задача определения неизвестного зависящего от времени коэффициента теплопроводности в одномерном уравнении теплопроводности. В качестве дополнительной информации используется интегральное условие, задающее полное количество тепла в теле. Задача сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестного коэффициента, приводятся утверждения о существовании решения на достаточно малом промежутке времени и о его единственности. Для численного восстановления коэффициента предложен алгоритм на основе неявной разностной схемы с итерациями на каждом временном шаге. Результаты расчётов на тестовом примере показывают сходимость метода и его устойчивость к погрешностям измерений.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, обратная задача, коэффициент, зависящий от времени, интегральное условие переопределения, уравнение Вольтерра, существование и единственность, разностная схема.*

INVERSE PROBLEM OF DETERMINING A TIME-DEPENDENT COEFFICIENT IN THE HEAT EQUATION

ABSTRACT

This thesis studies the inverse problem of determining an unknown time-dependent thermal conductivity coefficient in the one-dimensional heat equation. An integral condition representing the total amount of heat in the body is used as additional information. The problem is reduced to a nonlinear Volterra integral equation of the second kind for the unknown coefficient, and statements

on local existence and uniqueness of the solution are given. For the numerical reconstruction of the coefficient, an algorithm based on an implicit finite-difference scheme with iterations at each time step is proposed. Computational results for a test example demonstrate the convergence of the method and its stability with respect to measurement errors.

Keywords: *heat equation, inverse problem, time-dependent coefficient, integral overdetermination condition, Volterra integral equation, existence and uniqueness, finite-difference scheme.*

1. KIRISH

Issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarini matematik modellashtirishda tenglama koeffitsiyentlari, odatda, muhitning fizik xossalarini ifodalaydi. Amaliyotda bu koeffitsiyentlar ko‘pincha oldindan ma'lum bo‘lmaydi yoki vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi (masalan, metallarga termik ishlov berishda). Bunday hollarda noma'lum koeffitsiyentni yechim haqidagi qo‘shimcha o‘lchov ma'lumotlari asosida tiklash talab etiladi. Shu tarzda vujudga keladigan masalalar koeffitsiyentli teskari masalalar deb ataladi.

Parabolik tenglamada vaqtga bog‘liq koeffitsiyentni aniqlash masalasi birinchi bo‘lib J. Kennon tomonidan qo‘yilgan va tadqiq etilgan [1, 2]. Keyinchalik bu yo‘nalish M. Ivanchov [3], A.I. Prilepko va hammualliflari [4] ishlarida tizimli rivojlantirildi. Teskari masalalarning nokorrektligi, ya'ni yechimning kirish ma'lumotlaridagi kichik xatoliklarga sezgirligi S.I. Kabanixin [5] va V. Isakov [6] monografiyalarida batafsil yoritilgan. Sonli usullar A.A. Samarskiy va P.N. Vabishchevich [8] ishlarida rivojlantirilgan.

Tezisning maqsadi — vaqtga bog‘liq koeffitsiyentni integral qo‘shimcha shart yordamida aniqlash masalasini qo‘yish, uning yechilishi haqidagi asosiy

tasdiqlarni bayon qilish va sonli tiklash algoritmini test misolida sinashdan iborat.

2. MASALANING QO‘YILISHI

$Q_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \le T\}$ sohada quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$u_t = a(t)\, u_{xx} + f(x, t), \qquad (1)$$

bu yerda $u(x, t)$ — harorat, $a(t) > 0$ — noma'lum issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, $f(x, t)$ — ma'lum issiqlik manbai funksiyasi. (1) tenglama uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlar berilgan:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (3)$$

Agar $a(t)$ ma'lum bo‘lsa, (1)–(3) to‘g‘ri (bevosita) masala bo‘lib, u yagona yechimga ega [7]. Noma'lum $a(t)$ ni aniqlash uchun qo‘shimcha ma'lumot sifatida jismdagi to‘liq issiqlik miqdorini ifodalovchi integral shartni qo‘yamiz:

$$\int_0^l u(x, t)\, dx = E(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (4)$$

Teskari masala. (1)–(4) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{a(t), u(x, t)\}$ juftlikni topish talab qilinadi, bunda $a \in C[0, T]$, $a(t) > 0$ va $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$.

Kirish ma'lumotlariga quyidagi shartlar qo‘yiladi: $\varphi \in C^{2+\gamma}[0, l]$, μ_1, μ_2, $E \in C^1[0, T]$, $f \in C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{Q}_T)$, $0 < \gamma < 1$; moslashuv shartlari $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$, $\int_0^l \varphi(x)dx = E(0)$ bajariladi.

3. ASOSIY NATIJALAR

(1) tenglamani x bo‘yicha 0 dan l gacha integrallab va (4) shartdan foydalanib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$E'(t) = a(t)\,[u_x(l, t) - u_x(0, t)] + F(t), \quad F(t) = \int_0^l f(x, t)\, dx. \qquad (5)$$

Bundan noma'lum koeffitsiyent uchun ifoda kelib chiqadi:

$$a(t) = (E'(t) - F(t)) / (u_x(l, t) - u_x(0, t)). \qquad (6)$$

(6) formulaning maxraji yechimga bog‘liq bo‘lgani uchun u bevosita hisoblash formulasi emas, balki $a(t)$ ga nisbatan nochiziqli operator tenglamadir. $\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$ yangi vaqt o‘zgaruvchisini kiritib, (1)–(3) masalaning yechimini birinchi chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi orqali ifodalaymiz. Bu ifodani x bo‘yicha differensiallab, (6) ga qo‘yilsa, $a(t)$ ga nisbatan kuchsiz maxsuslikka ega yadroli ikkinchi tur nochiziqli Volterra integral tenglamasi hosil bo‘ladi. Shu yondashuv asosida quyidagi tasdiqlar o‘rinli [1, 3].

Teorema 1 (mavjudlik). Kirish ma'lumotlari 2-bandda keltirilgan shartlarni qanoatlantirsin va

$$(E'(0) - F(0)) / (\varphi'(l) - \varphi'(0)) > 0, \quad \varphi'(l) \neq \varphi'(0) \qquad (7)$$

tengsizlik bajarilsin. U holda shunday $T_0 \in (0, T]$ son topiladiki, (1)–(4) teskari masala $[0, T_0]$ oraliqda $a(t) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi $\{a(t), u(x, t)\}$ yechimga ega bo‘ladi.

Isbotda Volterra tenglamasining operatori yetarlicha kichik T_0 uchun qisqartiruvchi ekani ko‘rsatiladi; (7) shart esa $a(0) > 0$ ekanini kafolatlaydi.

Teorema 2 (yagonalik). Agar $\{a_1, u_1\}$ va $\{a_2, u_2\}$ juftliklar (1)–(4) masalaning $[0, T]$ dagi yechimlari bo‘lib, $a_i(t) > 0$ va $u_{ix}(l, t) - u_{ix}(0, t) \neq 0$ ($i = 1, 2$) bo‘lsa, u holda $a_1(t) \equiv a_2(t)$ va $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Isbotda ikki yechim ayirmasi uchun bir jinsli Volterra tenglamasi hosil qilinib, Gronuoll tipidagi lemma qo‘llaniladi.

4. SONLI YECHISH ALGORITMI VA NATIJALAR

$[0, l] \times [0, T]$ sohada $x_i = ih$, $t_j = j\tau$ tekis to‘r kiritamiz, bunda $h = l/N$, $\tau = T/M$. (1) tenglamani oshkormas ayirmali sxema bilan approksimatsiya qilamiz:

$$(u_i^{j+1} - u_i^j) / \tau = a_{j+1} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) / h^2 + f_i^{j+1}. \qquad (8)$$

Har bir vaqt qadamida a_{j+1} noma'lum bo‘lgani uchun iteratsion jarayon quriladi: boshlang‘ich yaqinlashish sifatida $a_{j+1}^{(0)} = a_j$ olinadi; har bir s-

iteratsiyada (8) sistema haydash (progonka) usuli bilan yechiladi, so‘ngra koeffitsiyent (6) formulaning ayirmali analogi bo‘yicha yangilanadi:

$$a_{j+1}^{(s+1)} = (E'(t_{j+1}) - F(t_{j+1})) / (D_h u_N^{j+1} - D_h u_0^{j+1}), \qquad (9)$$

bu yerda chegaraviy hosilalar ikkinchi tartibli bir tomonlama ayirmalar bilan hisoblanadi: $D_h u_0 = (-3u_0 + 4u_1 - u_2)/(2h)$, $D_h u_N = (3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2})/(2h)$. Iteratsiya $|a^{(s+1)} - a^{(s)}| < 10^{-8}$ bo‘lganda to‘xtatiladi.

Test misoli. $l = 1$, $T = 1$ bo‘lsin. Aniq yechim sifatida $a(t) = 1 + t^2$ va $u(x, t) = (1 + t)(x^2 + x^3) + 0{,}3e^{-t}\sin \pi x$ funksiyalar olinadi; f, φ, μ_1, μ_2 va E ularga mos ravishda hisoblanadi, xususan, $E(t) = 7(1 + t)/12 + 0{,}6e^{-t}/\pi$. Hisoblash natijalari 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. Koeffitsiyent va yechimni tiklash xatoliklari ($N = M$)

N = M	**max $\lvert a(t_j) - a_j \rvert$**	**max $\lvert u(x_i, T) - u_i^M \rvert$**	**Iteratsiyalar soni**
20	$4{,}97 \cdot 10^{-2}$	$2{,}71 \cdot 10^{-2}$	≤ 30
40	$1{,}44 \cdot 10^{-2}$	$8{,}02 \cdot 10^{-3}$	≤ 20
80	$4{,}58 \cdot 10^{-3}$	$2{,}58 \cdot 10^{-3}$	≤ 14
160	$1{,}64 \cdot 10^{-3}$	$9{,}31 \cdot 10^{-4}$	≤ 11

Jadvaldan ko‘rinadiki, to‘r maydalashgan sari xatolik kamayadi va usul taxminan birinchi tartib bilan yaqinlashadi, bu esa oshkormas sxemaning vaqt bo‘yicha aniqlik tartibiga mos keladi. O‘lchash xatoliklariga turg‘unlikni tekshirish uchun $E'(t)$ qiymatlariga δ nisbiy tasodifiy xatolik kiritildi: $N = M = 80$ bo‘lganda $\delta = 1\%$ uchun koeffitsiyentning maksimal xatoligi $5{,}47 \cdot 10^{-3}$, $\delta = 3\%$ uchun esa $7{,}36 \cdot 10^{-3}$ ni tashkil etdi.

5. XULOSA

Tezisda issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasida vaqtga bog‘liq koeffitsiyentni integral qo‘shimcha shart bo‘yicha aniqlash teskari masalasi

qaraldi. Masala noma'lum koeffitsiyent uchun (6) ko‘rinishdagi operator tenglamaga va undan ikkinchi tur nochiziqli Volterra integral tenglamasiga keltirildi; yechimning lokal mavjudligi va yagonaligi haqidagi tasdiqlar bayon etildi. Oshkormas ayirmali sxema va har bir vaqt qadamidagi iteratsiyaga asoslangan sonli algoritm taklif qilindi. Test misolidagi hisoblashlar algoritmning yaqinlashishini va kirish ma'lumotlaridagi kichik xatoliklarga nisbatan turg‘unligini tasdiqladi.

Kelgusida natijalarni nolokal chegaraviy shartlar va ko‘p o‘lchamli sohalarga umumlashtirish, shovqinli ma'lumotlar uchun regulyarizatsiya usullarini qo‘llash rejalashtirilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Cannon J.R. Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation // Duke Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 30, No. 2. — P. 313–323.
2. Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. — Menlo Park: Addison-Wesley, 1984. — 483 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 23).
3. Ivanchov M. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. — Lviv: VNTL Publishers, 2003. — 238 p. (Mathematical Studies Monograph Series, Vol. 10).
4. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 2000. — 709 p.
5. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — Berlin: De Gruyter, 2011. — 459 p.
6. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — 3rd ed. — Cham: Springer, 2017. — 406 p.

7. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. — Providence: American Mathematical Society, 1968. — 648 p.

8. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. — Berlin: De Gruyter, 2007. — 438 p.