

**IMMIGRATSIYALI TARMOQLANISH JARAYONI UCHUN
LIMIT TEOREMA**

Ergasheva Nurshodaxon Shuhratbek qizi

*Andijon viloyati Oltinko'l tumani 1-umumta'lim maktabi matematika fani
o'qituvchisi.*

Annotatsiya: Mazkur tezisda ehtimollar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lgan immigratsiyali tarmoqlanish jarayonlari va ular uchun limit teorema o'rganiladi. Immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni klassik Galton–Watson tarmoqlanish jarayonining umumlashmasi bo'lib, bunda har bir avlodning ko'payish jarayoniga tashqi muhitdan yangi individlarning qo'shilishi, ya'ni immigratsiya hodisasi ham hisobga olinadi. Ishda jarayonning matematik modeli, matematik kutilmasi va dispersiyasi, generatsiyalovchi funksiyasi hamda uzoq muddatli xatti-harakati ko'rib chiqiladi. Shuningdek, immigratsiya mavjud bo'lgan holatda normallashtirilgan jarayon uchun limit taqsimotining shakllanishi va unga ta'sir qiluvchi asosiy shartlar bayon etiladi.

Kalit so'zlar: ehtimollar nazariyasi, tarmoqlanish jarayoni, Galton–Watson jarayoni, immigratsiya, limit teorema, matematik kutilma, dispersiya, generatsiyalovchi funksiya, limit taqsimot.

KIRISH

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy jarayonlarni matematik modellashtirish muhim ilmiy masalalardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, populyatsiyalar sonining vaqt davomida o'zgarishini o'rganishda tarmoqlanish jarayonlari keng qo'llaniladi. Tarmoqlanish jarayonlarining dastlabki va eng mashhur modellaridan biri Galton–Watson jarayoni bo'lib, unda har bir individ mustaqil ravishda tasodifiy sondagi avlod qoldiradi.

Amaliy masalalarda esa populyatsiyaning faqat ichki ko'payishi emas, balki tashqi muhitdan yangi individlarning kirib kelishi ham muhim ahamiyatga ega.

Bunday jarayon immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni deb ataladi. Mazkur model biologik populyatsiyalar dinamikasi, epidemiologiya, demografiya, navbatlar nazariyasi, sug'urta matematikasi va boshqa ko'plab sohalarda uchraydigan jarayonlarni tavsiflash imkonini beradi.

Immigratsiyaning mavjudligi jarayonning uzoq muddatli xususiyatlarini sezilarli darajada o'zgartiradi. Klassik tarmoqlanish jarayonida jarayonning so'nishi yoki cheksiz o'sishi asosiy masala bo'lsa, immigratsiya mavjud bo'lganda tashqi manba hisobiga yangi individlarning muntazam ravishda paydo bo'lishi mumkin. Shu sababli bunday jarayon uchun limit teoremlarni o'rganish nazariy va amaliy jihatdan muhimdir.

1. Immigratsiyali tarmoqlanish jarayonining matematik modeli

(Z_n) orqali (n)-avloddagi individlar sonini belgilaymiz. Immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni quyidagi rekurrent munosabat bilan ifodalanadi:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} + Y_{n+1},$$

bu yerda:

- ($X_{n,i}$) — (i)-individning (n)-avloddan ($n+1$)-avlodga qoldiradigan avlodlari soni;
- (Y_{n+1}) — ($n+1$)-bosqichda tashqi muhitdan immigratsiya orqali kelgan individlar soni;
- ($X_{n,i}$) va (Y_n) lar mos ravishda mustaqil tasodifiy miqdorlar deb qaraladi.

Faraz qilamizki,

$$E(X_{n,i}) = m, \text{ qquad}$$

$$D(X_{n,i}) = \sigma^2,$$

va

$$E(Y_n) = \lambda, \text{ qquad}$$

$$D(Y_n) = \tau^2.$$

Bu yerda (m) — bitta individning o'rtacha avlodlar soni, (λ) esa bir bosqichdagi o'rtacha immigratsiya miqdorini ifodalaydi.

Shartli matematik kutilmani hisoblasak,

$$E(Z_{n+1}) \text{ mid}$$

$$Z_n = mZ_n + \lambda.$$

Shundan foydalanib, ($a_n = E(Z_n)$) deb belgilasak,

$$a_{n+1} = ma_n + \lambda.$$

Agar ($m \neq 1$) bo'lsa, ushbu rekurrent tenglamaning yechimi

$$E(Z_n) = m^n E(Z_0) + \lambda \frac{m^n - 1}{m - 1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Demak, immigratsiya jarayonning o'rtacha hajmiga qo'shimcha (λ) miqdorda ta'sir qiladi. Xususan, kritik holatda, ya'ni ($m=1$) bo'lganda,

$$E(Z_n) = E(Z_0) + n\lambda.$$

Bu natija immigratsiya mavjud bo'lgan kritik tarmoqlanish jarayonida populyatsiyaning o'rtacha soni vaqt o'tishi bilan chiziqli ravishda ortishini ko'rsatadi.

2. Generatsiyalovchi funksiya

Tarmoqlanish jarayonlarini o'rganishda generatsiyalovchi funksiyalardan foydalanish qulay hisoblanadi. Avlod berish tasodifiy miqdorining generatsiyalovchi funksiyasini

$$f(s) = E(s^X), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

immigratsiya miqdorining generatsiyalovchi funksiyasini esa

$$g(s) = E(s^Y)$$

orqali belgilaymiz.

U holda (Z_{n+1}) ning shartli generatsiyalovchi funksiyasi

$$f(s)^{Z_n} g(s)$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar ($F_n(s) = E(s^{Z_n})$) bo'lsa, u holda

$$F_{n+1}(s) = g(s)F_n(f(s)).$$

Ushbu formula immigratsiyali tarmoqlanish jarayonining asosiy funksional tenglamalaridan biridir.

Iteratsiya orqali

$$F_0(f_n(s))$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} g(f_k(s))$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu yerda ($f_k(s)$) — ($f(s)$) funksiyaning (k)-marta iteratsiyasi.

Mazkur formula jarayonning taqsimotini aniqlashda hamda (n toinfty) da

limit holatni o'rganishda muhim vosita hisoblanadi.

3. Immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni uchun limit teorema

Limit teoremlar tarmoqlanish jarayonining uzoq muddatli xususiyatlarini aniqlashga xizmat qiladi. Jarayonning xarakteri avlod berish o'rtacha qiymati (m) ga bog'liq holda uch asosiy holatga ajratiladi:

$$m < 1, \text{ yoki } m = 1, \text{ yoki } m > 1.$$

($m < 1$) bo'lgan subkritik holatda ichki tarmoqlanish jarayoni so'nishga intiladi. Biroq immigratsiya mavjudligi sababli jarayonning umumiy soni nolga tushmasligi va ma'lum stasionar taqsimot atrofida shakllanishi mumkin.

Agar immigratsiya miqdori (Y_n) lar bir xil taqsimlangan va mustaqil bo'lsa hamda tegishli momentlar mavjud bo'lsa, ($m < 1$) shart ostida (Z_n) uchun stasionar limit taqsimotining mavjudligi kutiladi. Limit tasodifiy miqdor (Z) generatsiyalovchi funksiyasi

$$F(s) = \prod_{k=0}^{\infty} g(f_k(s))$$

ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Bu yerda ($f_k(s) \rightarrow 1$) bo'lishi ($m < 1$) sharti bilan bog'liq.

Shunday qilib, subkritik holatda

$$Z_n \xrightarrow{\text{d}} Z, \text{ yoki } n \rightarrow \infty,$$

ya'ni (Z_n) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (Z) limit taqsimotiga yaqinlashadi.

Ushbu natija immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni uchun muhim limit xususiyatini ifodalaydi: tashqi muhitdan individlarning kelib turishi jarayonni doimiy ravishda qo'llab-quvvatlaydi, ichki ko'payish koeffitsiyenti esa (1) dan kichik bo'lganda populyatsiya soni muvozanatli stasionar holatga yaqinlashishi mumkin.

Kritik holatda ($m = 1$) bo'lsa, jarayonning o'rtacha qiymati

$$E(Z_n) = E(Z_0) + n \lambda$$

bo'lgani sababli normallashtirish masalasi yuzaga keladi. Masalan, immigratsiya intensivligi (λ) va avlod berish dispersiyasi chekli bo'lgan sharoitda jarayonning katta (n) dagi xatti-harakatini markazlashtirish va mos masshtabga keltirish orqali o'rganish mumkin.

Subkritik holatda esa limit taqsimotning mavjudligi ancha tabiiy ko'rinishda namoyon bo'ladi. Xususan, stasionar holat uchun (Z) tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot tenglamasini qanoatlantiradi:

$$Z \text{overset}{d}{=} \sum_{i=1}^Z X_i + Y.$$

Bu tenglama immigratsiyali tarmoqlanish jarayonining stasionar taqsimoti uchun asosiy muvozanat tenglamasi hisoblanadi.

4. Limit teoremaning amaliy ahamiyati

Immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni nafaqat nazariy ehtimollar nazariyasida, balki amaliy modellashtirishda ham muhim ahamiyatga ega. Masalan, biologik populyatsiyalarda yangi individlarning tashqaridan kelib qo'shilishi immigratsiya sifatida qaralishi mumkin. Epidemiologik modellar uchun esa kasallik tashuvchilarning tashqi manbadan kirib kelishi shunga o'xshash matematik modelni yuzaga keltiradi.

Bundan tashqari, mazkur jarayonlar navbatlar nazariyasida mijozlarning yangi kelishi va mavjud mijozlarning xizmat ko'rsatish jarayonlari bilan bog'liq ayrim modellarni tahlil qilishda qo'llanilishi mumkin. Demografik modellashtirishda esa tug'ilish, avlodlar almashinuvi va migratsiya jarayonlarini birgalikda hisobga olish imkonini beradi.

Limit teoremlar ushbu modellarni uzoq muddat uchun tahlil qilish imkonini beradi. Ayniqsa, jarayonning stasionar taqsimotga yaqinlashishi, o'rtacha sonning o'sish sur'ati va dispersiyaning vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlash amaliy masalalar uchun katta ahamiyatga ega.

XULOSA

Immigratsiyali tarmoqlanish jarayoni klassik Galton–Watson tarmoqlanish jarayonining muhim umumlashmasi bo'lib, unda ichki ko'payish bilan bir qatorda tashqi muhitdan yangi individlarning kelishi ham hisobga olinadi. Jarayon

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} + Y_{n+1}$$

rekurrent munosabat orqali ifodalanadi.

Tadqiqot natijasida jarayonning matematik kutilmasi, generatsiyalovchi funksiyasi va limit xususiyatlari ko'rib chiqildi. Avlod berishning o'rtacha qiymati

($m < 1$) bo'lgan subkritik holatda immigratsiyaning doimiy mavjudligi jarayonning stasionar limit taqsimotga yaqinlashishiga olib kelishi mumkin. Kritik va superkritik holatlarda esa jarayonning asimptotik xatti-harakatini aniqlash uchun qo'shimcha normallashtirish va moment shartlari talab qilinadi.

Umuman olganda, immigratsiyali tarmoqlanish jarayonlari ehtimollar nazariyasining muhim modellaridan biri bo'lib, ularning limit teoremlarini o'rganish tasodifiy jarayonlarning uzoq muddatli xususiyatlarini tushunish va amaliy tizimlarni matematik modellashtirish uchun muhim nazariy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Athreya K.B., Ney P.E. *Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
2. Harris T.E. *The Theory of Branching Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
3. Sevastyanov B.A. *Branching Processes*. Nauka, Moscow, 1971.
4. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. Wiley, New York.
5. Jagers P. *Branching Processes with Biological Applications*. Wiley, London, 1975.