

GOMOTOPIK GURUHLARNING ALGEBRAIK XOSSALARI

Rashidova Hulkar Sulaymon qizi

Choriyeva Oybarchin Abdurahmon qizi

Annotatsiya: Maqolada nuqtasi belgilangan topologik fazolarning gomotopik guruhleri algebraik nuqtayi nazardan tahlil qilinadi. Asosiy e'tibor fundamental guruh va yuqori gomotopik guruhleri bir-biridan ajratadigan strukturaviy belgilarga, amallarning gomotopiya sinflarida aniqlanishiga hamda hisoblashda qo'llanadigan tabiiy gomomorfizmlarga qaratiladi. Tadqiqot mantiqiy-deduktiv tahlil, kub modeli, Ekkmann–Hilton argumenti va standart fazolardagi hisoblashlarni taqqoslashga asoslanadi. Aylana, tor, sfera va ko'paytma fazolar misolida gomotopik invariantlarning qanday ma'lumot berishi ko'rsatiladi. Yuqori gomotopik guruhlarning abel bo'lishi, dekart ko'paytmada ajralishi, uzluksiz akslantirishlarning induksiyalangan gomomorfizmlari hamda Gyurevich gomomorfizmining hisoblashdagi vazifasi izchil yoritiladi.

Kalit so'zlar: gomotopiya, fundamental guruh, yuqori gomotopik guruh, abel grupp, funktoriallik, sfera, tor, Gyurevich gomomorfizmi.

Аннотация: В статье систематически рассматриваются алгебраические свойства гомотопических групп топологических пространств с отмеченной точкой. Анализируются отличие фундаментальной группы от высших гомотопических групп, корректность групповой операции на классах гомотопии, функториальность и вычислительные следствия. Методологическую основу составляют дедуктивный анализ, кубическая модель гомотопических групп, аргумент Экмана–Хилтона и сравнение стандартных примеров. На примере окружности, тора, сферы и произведений пространств обсуждается содержание гомотопических инвариантов. Описываются связь с гомологиями через гомоморфизм Гуревича и роль точных

последовательностей фибраций.

Ключевые слова: гомотопия, фундаментальная группа, высшие гомотопические группы, абелева группа, функториальность, сфера, тор.

Abstract: This paper offers a structured analysis of the algebraic properties of homotopy groups of pointed topological spaces. It distinguishes the potentially noncommutative fundamental group from higher homotopy groups, explains group operations on homotopy classes, and examines functoriality and its computational consequences. The approach combines deductive reasoning, the cubical description of homotopy groups, the Eckmann–Hilton argument, and comparisons of familiar spaces. The circle, torus, sphere, and products illustrate how these invariants encode geometric information. The Hurewicz homomorphism and the long exact sequence associated with a fibration are discussed as bridges between abstract structure and practical computation.

Keywords: homotopy, fundamental group, higher homotopy groups, abelian group, functoriality, sphere, torus.

1. KIRISH (INTRODUCTION)

Geometrik obyektни faqat uning tashqi shakli bilan tavsiflash ko‘plab topologik savollarni yechishga yetmaydi. Masalan, fazodagi yopiq yo‘lni nuqtaga uzluksiz qisqartirish mumkinmi yoki sferadan berilgan fazoga o‘tkazilgan akslantirish deformatsiya orqali doimiy akslantirishga keltiriladimi? Algebraik topologiya bunday savollarni guruhlar va ular orasidagi akslantirishlar tiliga o‘giradi. Bu o‘tishning asosiy vositalaridan biri gomotopik guruhlardir [1, 2].

Birinchi gomotopik guruh — fundamental guruh — yopiq yo‘llar sinflarini o‘rganadi. Uning algebraik tuzilishi fazoning bir o‘lchamli aylanish xususiyatlarini aks ettiradi. Lekin fundamental guruh trivial bo‘lishi fazo mutlaqo gomotopik jihatdan sodda ekanini anglatmaydi: ikki o‘lchamli sferaning fundamental guruhi trivial, ikkinchi gomotopik guruhi esa butun sonlar guruhiga izomorfdir. Demak, yuqori o‘lchamli akslantirishlarni ham inobatga olish zarur [1].

Maqolaning maqsadi gomotopik guruhlarining asosiy algebraik xossalarini

bir izchil doirada bayon qilish va turli natijalar orasidagi mantiqiy munosabatni oddiy hisoblashlar orqali ochib berishdan iborat. Tadqiqot predmeti — guruh amallari, kommutativlik, uzluksiz akslantirishlar induksiyaalagan gomomorfizmlar va gomotopik invariantlar o'rtasidagi bog'lanishlar. Tadqiqot adabiyotlarda ma'lum natijalarning nazariy sharhi bo'lib, mustaqil yangi teorema isbotlanganini da'vo qilmaydi.

2. MATERIALLAR VA METODLAR (METHODS)

Metodik jihatdan izlanish to'rtta qadamga tayangan: (a) tayanch nuqtali gomotopiyaning aniq ta'rifini belgilash; (b) kub modelida guruh amalini konstruktiv tushuntirish; (c) klassik strukturaviy teoremlarni qo'llash; (d) natijalarni standart fazolarga tatbiq etib, ularning qamrovi va cheklanishini taqqoslash. Asosiy manba sifatida Hatcherning algebraik topologiyaga oid monografiyasidan, qo'shimcha qiyoslash uchun May va Rotman asarlaridan foydalanildi [1–3].

2.1. Gomotopiya va gomotopik sinf

X va Y topologik fazolar, $f, g: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. Agar $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ uzluksiz bo'lib, $H(x,0)=f(x)$ va $H(x,1)=g(x)$ tengliklar bajarilsa, f va g gomotopik deyiladi. Tayanch nuqtali holatda gomotopiya davomida tanlangan nuqta o'zgarmaydi. Bu talab muhim: u akslantirishlar sinflari ustida guruh tuzilishini izchil aniqlashga imkon beradi [1].

$n \geq 1$ uchun $\pi_n(X, x_0)$ belgisi S^n sferadan X fazoga tayanch nuqtani saqllovchi akslantirishlarning tayanch nuqtali gomotopiya sinflari to'plamini anglatadi:

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_0), (X, x_0)]^* . \quad (1)$$

Amallarni yozishda unga ekvivalent kub modeli qulay: $I^n=[0,1]^n$, ∂I^n esa uning chegarasi bo'lsa, chegarani x_0 nuqtaga yuboruvchi akslantirishlar sinflari $\pi_n(X, x_0)$ ni hosil qiladi.

2.2. Algebraik amal va isbot usuli

Kubni birinchi koordinata bo'yicha teng ikkiga bo'lib, ikkita akslantirishni ketma-ket bajarish orqali $[f] \cdot [g]$ ko'paytma aniqlanadi. Chegaradagi qiymatlar bir xil bo'lgani uchun bo'lakli akslantirish uzluksizdir; gomotopik vakilni almashtirish

hosil bo'lgan sinfni o'zgartirmaydi. Doimiy akslantirish sinfi birlik element, koordinatani teskari yo'naltirish esa teskari elementni beradi. Assotsiativlik vakillarning aynan tengligida emas, ularning gomotopiya sinflarida bajariladi [1].

3. NATIJALAR (RESULTS)

3.1. Birinchi va yuqori gomotopik guruhlarining farqi

Fundamental guruh $\pi_1(X, x_0)$ yopiq yo'llarni ulash amaliga asoslanadi. U umumiy holda nokommutativ bo'lishi mumkin. Masalan, bir nuqtada tutashgan ikkita aylana $S^1 \vee S^1$ uchun fundamental guruh ikki generatorli erkin guruh F_2 ga izomorf; unda generatorlarning tartibini almashtirish odatda boshqa element beradi [1, 3].

$n \geq 2$ bo'lganda esa kubning birinchi va ikkinchi koordinatalari bo'yicha ikkita ko'paytirish amalini qurish mumkin. Ular umumiy birlik elementga ega va o'zaro almashinuv qonunini qanoatlantiradi. Ekkmann–Hilton argumenti bu ikki amal bir xil va kommutativ ekanini ko'rsatadi. Shuning uchun:

$$\pi_n(X, x_0) \text{ — abel gruppasi, } n \geq 2. \quad (2)$$

Buning mohiyati shundaki, n -o'lchamli parametrlar yetarli bo'lganda ikki kompozitsiyani bir-birining orasidan "o'tkazish" mumkin. Bir o'lchamli yo'llarda bunday ikkinchi mustaqil yo'nalish mavjud emas. Shu sababli (2) natija faqat algebraik tasodif emas, balki parametr fazoning geometrik tuzilishidan kelib chiqadi.

3.2. Funktoriallik va gomotopiya invariantligi

Tayanch nuqtani saqlovchi $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uzluksiz akslantirish har bir $n \geq 1$ da $f^*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ gomomorfizmini induksiylaydi. U $[\alpha]$ sinfni $[f\alpha]$ sinfga o'tkazadi. Birlik akslantirish birlik gomomorfizmini, akslantirishlar kompozitsiyasi esa gomomorfizmlar kompozitsiyasini keltirib chiqaradi:

$$(g \circ f)^* = g^* \circ f^*. \quad (3)$$

Agar X va Y tayanch nuqtali gomotopiya ekvivalent bo'lsa, induksiylangan gomomorfizmlar izomorfizmdir. Aksincha, barcha n lar bo'yicha shunchaki abstrakt guruh izomorfizmlari mavjudligi istalgan fazolarni gomotopiya ekvivalent deb e'lon qilishga yetmaydi. CW-komplekslar orasidagi bitta akslantirish barcha

gomotopik guruhlarda izomorfizm hosil qilsa, Uaytxed teoremasi muhim qo'shimcha shartlarda gomotopiya ekvivalentligini beradi [1].

3.3. Ko'paytma fazolar uchun ajralish

$X \times Y$ fazoga sfera akslantirishi koordinatalari bo'yicha ikkita akslantirishga ekvivalent. Gomotopiya ham koordinatalar bo'yicha tekshiriladi. Natijada har bir $n \geq 1$ uchun tabiiy izomorfizm mavjud:

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0). \quad (4)$$

Bu formula elementar ko'paytmalarning gomotopik guruhlarini mustaqil ko'paytuvchilar orqali topish imkonini beradi. Ammo yopishtirish yoki faktor-fazo qurish amallarida aynan shunday sodda ko'paytma formulasi umumiy holda mavjud emas.

3.4. Asosiy misollar va algebraik talqin

Fazo	π_1	Yuqori guruhga misol
S^1	$\mathbb{Z}$	$\pi_n(S^1)=0, n \geq 2$
S^2	0	$\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}; \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$
$T^2=S^1 \times S^1$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\pi_n(T^2)=0, n \geq 2$
$S^1 \times S^2$	$\mathbb{Z}$	$\pi_2(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$

1-jadval. Standart fazolar gomotopik guruhlarining tanlangan qiymatlari [1, 2].

Aylana uchun $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ bo'lib, butun son yopiq yo'lining yo'nalish bilan hisoblangan aylanish sonini bildiradi. Tor T^2 ikki aylananing dekart ko'paytmasi sifatida qaralsa, (4) ga ko'ra $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kelib chiqadi. S^2 uchun $\pi_1(S^2)=0$, lekin $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Ushbu uch misol bir xil guruhga qarab turli o'lchamli geometrik hodisalarni adashtirmaslik lozimligini ko'rsatadi [1].

3.5. Gyurevich gomomorfizmi va fibratsiyalar

Gomotopik guruhlarini bevosita hisoblash ko'pincha murakkab. Shuning uchun ular gomologiya bilan solishtiriladi. Gyurevich gomomorfizmi $h_n: \pi_n(X) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$ ni aniqlaydi. X fazo $(n-1)$ -bog'langan va $n \geq 2$ bo'lsa, Gyurevich teoremasiga muvofiq h_n izomorfizmdir. Ayniqsa, $\pi_n(S^n) \cong H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ natijasi buning ravshan misolidir [1].

$F \rightarrow E \rightarrow B$ fibratsiyasi uchun uzun aniq ketma-ketlik gomotopik guruhlarini o'zaro bog'laydi:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(B) \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \quad (5)$$

Ketma-ketlikning aniqligi qo'shni ikkita gomomorfizm uchun oldingisining tasviri keyingisining yadrosiga tengligini bildiradi. Masalan, Hopf fibratsiyasi $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ bilan (5) ni qo'llash $\pi_3(S^3) \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ natijani beradi. Bu misol mavjud guruhlar orqali noma'lum guruhlarini topishda aniq ketma-ketlikning amaliy kuchini namoyish qiladi [1].

4. MUHOKAMA (DISCUSSION)

Olingan taqqoslashlardan asosiy metodologik xulosa shuki, gomotopik guruhni faqat algebraik obyekt sifatida yozib qo'yish fazo haqidagi barcha axborotni bermaydi. Birinchi darajada yo'llarning turli tartibda ulanishi muhim; yuqori darajalarda kommutativlik paydo bo'ladi, biroq guruhlar o'rtasidagi bog'lovchi amallar yanada murakkablashadi. Xususan, $\pi_1(X, x_0)$ fundamental guruh $\pi_n(X, x_0)$ ga ($n \geq 2$) avtomorfizmlar orqali ta'sir qiladi. Natijada yuqori gomotopik guruhlarini $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ guruh halqasi ustidagi modullar sifatida o'rganish mumkin [1, 2].

Boshqa muhim hodisa — Uaytxed ko'paytmasi. $p, q \geq 2$ bo'lganda u $\pi_p(X) \times \pi_q(X)$ dan $\pi_{p+q-1}(X)$ ga o'tadigan amal bo'lib, turli darajadagi sinflar orasidagi munosabatni qayd etadi. Shu sababli barcha π_n guruhlar ro'yxati ayrim hisoblashlarda yetarli bo'lmaydi: ular orasidagi ta'sirlar va operatsiyalar ham o'rganilishi kerak [1, 4].

Maqolada ishlatilgan misollar klassik va hisoblash jihatidan nisbatan sodda fazolar bilan cheklangan. Murakkab CW-komplekslar, sferalarning yuqori gomotopik guruhlarini va barqaror gomotopiya guruhlariga o'tishda spektral ketma-ketliklar yoki boshqa usullar talab etilishi mumkin [1, 4]. Demak, shu yerda yoritilgan algebraik xossalar tadqiqot uchun kirish nuqtasini beradi, ammo universal hisoblash algoritmini bermaydi.

5. XULOSA (CONCLUSION)

Tahlil shuni ko'rsatdiki, gomotopik guruhlarining algebraik mazmuni ikki

omil orqali ochiladi: har bir guruhning ichki tuzilishi va turli guruhlar bog'lovchi tabiiy akslantirishlar. Fundamental guruh erkin guruh kabi nokommutativ bo'lishi mumkin; ikkinchi va undan yuqori gomotopik guruhlar esa Ekkmann–Hilton argumenti natijasida abeldir. Funktoriallik va dekart ko'paytma formulasi invariantlarni uzluksiz akslantirishlar hamda sodda fazolardan tuzilgan murakkab obyektlarga ko'chirish imkonini beradi.

Sfera va tor misollari fundamental guruhning o'zi topologik tuzilishni to'liq ochmasligini yaqqol ko'rsatadi. Gyurevich teoremasi gomologiya bilan aloqa o'rnatasa, fibratsiyalarning uzun aniq ketma-ketligi hisoblashlarni tizimli davom ettirish imkonini beradi. Shu asosda kelgusidagi maxsus tadqiqotlarda belgilangan CW-komplekslar sinfi, unga mos π_1 -ta'siri va Uaytxed ko'paytmalari birgalikda o'rganilishi istiqbolli yo'nalish sifatida tavsiya qilinadi. Mazkur ish o'quv-uslubiy va nazariy sintez bo'lib, original matematik natijani alohida asoslash keyingi ilmiy izlanish vazifasi bo'lib qoladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Hatcher A. Algebraic Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 544 p. <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
2. May J. P. A Concise Course in Algebraic Topology. Chicago: University of Chicago Press, 1999.
3. Rotman J. J. An Introduction to Algebraic Topology. New York: Springer, 1988.
4. Whitehead G. W. Elements of Homotopy Theory. New York: Springer, 1978. DOI: 10.1007/978-1-4612-6318-0.