

**SUYUQLIKSIZ SILINDRSIMON BO'SHLIQDA ELASTIK SIRT
TO'LQINLARINING TARQALISHI VA DISPERSIYASI**

¹Mirzoyeva G.T., ²Ibrohimov A.I., ³Tohirova N.T., ⁴Ikromov S.N.

¹ Buxoro davlat texnika universiteti Aniq fanlar kafedrası assistent
o'qituvchisi

gmirzoyeva@bstu.uz <https://orcid.org/0009-0007-7663-9301>

²Buxoro shahar 19-IDUM matematika fani o'qituvchisi
azizibrohimov554@gmail.com

³Buxoro tuman 14-umumta'lim maktabi o'qituvchisi ,
tohirovanigina2@gmail.com

⁴Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti assistent
o'qituvchisi, sunnatilloikromov646@gmail.com , <https://orcid.org/0009-0001-8000-9560>

Kalit so'zlar: *elastik to'lqinlar, silindrsimon teshik, Rəley to'lqini, dispersiya, fazaviy tezlik, guruh tezligi, kesish to'lqin uzunligi, modifikatsiyalangan Bessel funksiyalari*

Kirish

Elastik muhitlarda to'lqinlarning tarqalishi deformatsiyalanuvchi qattiq jism mexanikasining nazariy va amaliy ahamiyatga ega klassik yo'nalishlaridan biridir. Tekis chegarali yarim cheksiz elastik jism yuzasida tarqaladigan Rəley to'lqini yaxshi o'rganilgan klassik natija hisoblanadi. Biroq amaliyotda ko'plab masalalar — burg'ilash quduqlarida akustik karotaj, quvur va yong'oq konstruksiyalaridagi to'lqin diagnostikasi, geofizik razvedka — silindrsimon geometriyaga ega bo'shliqlarni o'rganishni taqozo etadi. Silindrsimon teshik holida qo'shimcha xarakterli chiziqli o'lcham — teshik diametri D — mavjudligi sababli to'lqin tarqalishi dispersiv xarakter kasb etadi, ya'ni fazaviy tezlik to'lqin uzunligi λ ning diametrga nisbati λ/D ga bog'liq bo'lib qoladi.

Ushbu tezis M. Biotning 1952-yilda nashr etilgan klassik ishi [1] asosida,
www.tadqiqotlar.uz *35-to'plam 1-son sentyabr 2026*

cheksiz elastik muhitda joylashgan bo'sh (suyuqliksiz) silindrsimon teshik yuzasida tarqaladigan aksial-simmetrik elastik yuza to'lqinlarining dispersion tenglamasini tahlil qiladi. Manba maqolada grafik (qo'lda chizilgan) tarzda keltirilgan dispersiya egri chiziqlari ushbu ishda zamonaviy sonli usullar (Python, SciPy kutubxonasi, modifikatsiyalangan Bessel funksiyalari va Brent algoritmi) yordamida mustaqil ravishda qayta hisoblab chiqildi va tahlil qilindi.

Tadqiqotning maqsadi

Cheksiz elastik muhitdagi bo'sh silindrsimon teshik yuzasida tarqaladigan aksial-simmetrik yuza to'lqinlarining dispersion tenglamasini sonli usulda yechish; fazaviy va guruh tezliklarining λ/D nisbatiga bog'liqligini turli Puasson koefitsienti (ν) qiymatlarida aniqlash; kesish (cut-off) to'lqin uzunligining Puasson koefitsientiga bog'liqligini tekshirish va olingan natijalarni manba [1] bilan solishtirish.

Matematik model va yechish metodi

Qattiq jismning siljish maydoni (U, V, W) skalyar potensial ϕ va vektor potensial $\bar{\psi}$ orqali ifodalanadi:

$$(U, V, W) = \nabla\phi + \nabla \times \bar{\psi} \quad (1)$$

Bu potentsiallar quyidagi to'lqin tenglamalarini qanoatlantiradi:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\bar{\psi} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2} \quad (2)$$

bunda v_c va v_s mos ravishda bo'ylama (dilatatsion) va ko'ndalang (burchakli) to'lqinlar tezligi bo'lib, ular yuklama moduli G , jism zichligi ρ_1 va Puasson koefitsienti ν orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$v_c = \left[\frac{2G(1-\nu)}{\rho_1(1-2\nu)} \right]^{1/2}, \quad v_s = \left(\frac{G}{\rho_1} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Aksial-simmetrik holat uchun silindrsimon koordinatalarda z o'qi bo'ylab tarqaluvchi sinusoidal to'lqin ko'rinishidagi yechim qidiriladi:

$$\phi = \phi_0 K_0(mr) \cos(lz - \omega t), \quad \psi = \psi_0 K_1(kr) \sin(lz - \omega t) \quad (4)$$

bunda K_0, K_1 — ikkinchi turdagi modifikatsiyalangan Bessel funksiyalari bo'lib, ular $r \rightarrow \infty$ da eksponensial ravishda so'nadi (siljishlarning teshikdan uzoqlashgan sari kamayishini ta'minlaydi); shuningdek

$$m = l(1 - \zeta_2^2)^{1/2}, \quad k = l(1 - \zeta_1^2)^{1/2}, \quad \zeta_1 = \frac{v}{v_s}, \quad \zeta_2 = \frac{v}{v_c}$$

Teshik yuzasi $r = a$ da erkin (kuchlanishsiz) chegara shartlari qo'yiladi:

$$\tau = 0, \quad \sigma_r = 0 \quad (r = a)$$

Bu shartlarni qo'llash natijasida quyidagi bir jinsli (RHS = 0) dispersion tenglama hosil bo'ladi:

$$L(\zeta_1, \zeta_2; la) \equiv 4\sqrt{1 - \zeta_1^2} \left[\frac{1}{ka} + \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \right] - \frac{2(2 - \zeta_1^2)\sqrt{1 - \zeta_2^2}}{ma} - \frac{(2 - \zeta_1^2)^2}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \frac{K_0(ma)}{K_1(ma)}$$

va dispersion shart quyidagicha yoziladi:

$$L(\zeta_1, \zeta_2; la) = 0 \quad (5)$$

bunda $la = \pi D/\lambda$ — o'lchamsiz to'lqin soni,

$$la = \frac{2\pi a}{\lambda} = \pi \frac{D}{\lambda}$$

$\zeta_1 = v/v_s$ va $\zeta_2 = v/v_c$ esa fazaviy tezlikning mos ravishda ko'ndalang va bo'ylama to'lqin tezliklariga nisbati. $la \rightarrow \infty$ (juda qisqa to'lqin) chegarasida (5)-tenglama tekis chegarali yarim cheksiz muhitdagi klassik Rəley tenglamasiga aylanadi:

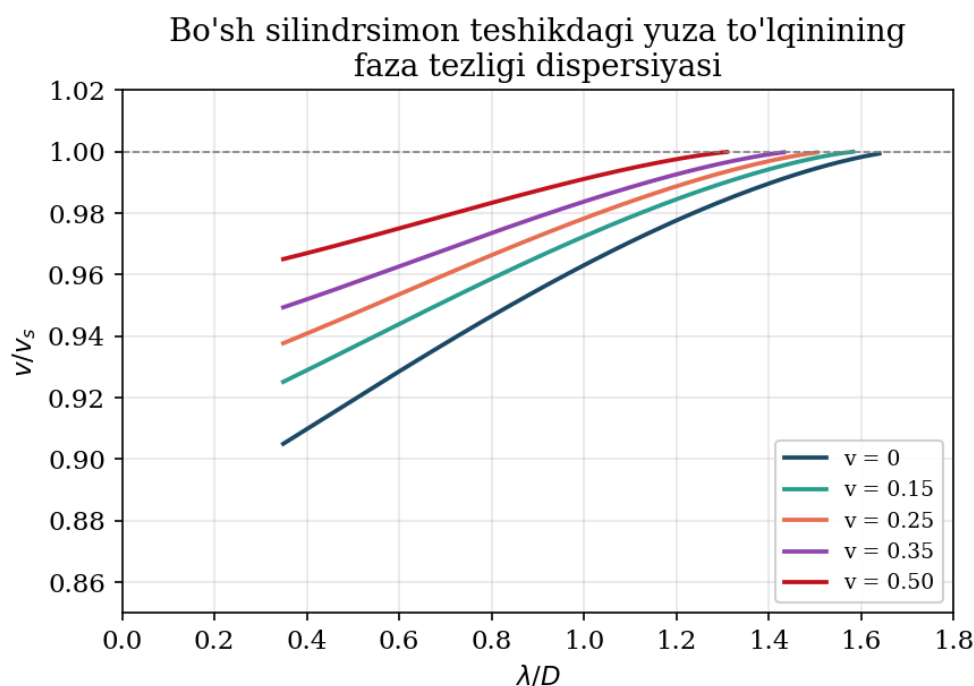
$$4\sqrt{1 - \zeta_1^2} - \frac{(2 - \zeta_1^2)^2}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} = 0 \quad (6)$$

bu muhim chegaraviy holat sonli usulning to'g'riligini tekshirish imkonini beradi. Guruh tezligi klassik ta'rif orqali hisoblanadi:

$$v_g = \frac{d\omega}{dl} \implies \frac{v_g}{v_s} = \frac{d(\zeta_1 la)}{d(la)} \quad (7)$$

Natijalar va ularning tahlili

(5)-tenglama Puasson koefitsientining $\nu = 0; 0,15; 0,25; 0,35; 0,50$ qiymatlari uchun λ ning keng oralig'ida sonli yechildi (modifikatsiyalangan Bessel funksiyalari va Brent ildiz izlash algoritmi qo'llanildi). 1-rasmda olingan fazaviy tezlik dispersiya egri chiziqlari keltirilgan.



1-rasm. Bo'sh silindrsimon teshikdagi aksial-simmetrik yuza to'lqinining fazaviy tezligi dispersiyasi (turli Puasson koefitsientlari uchun)

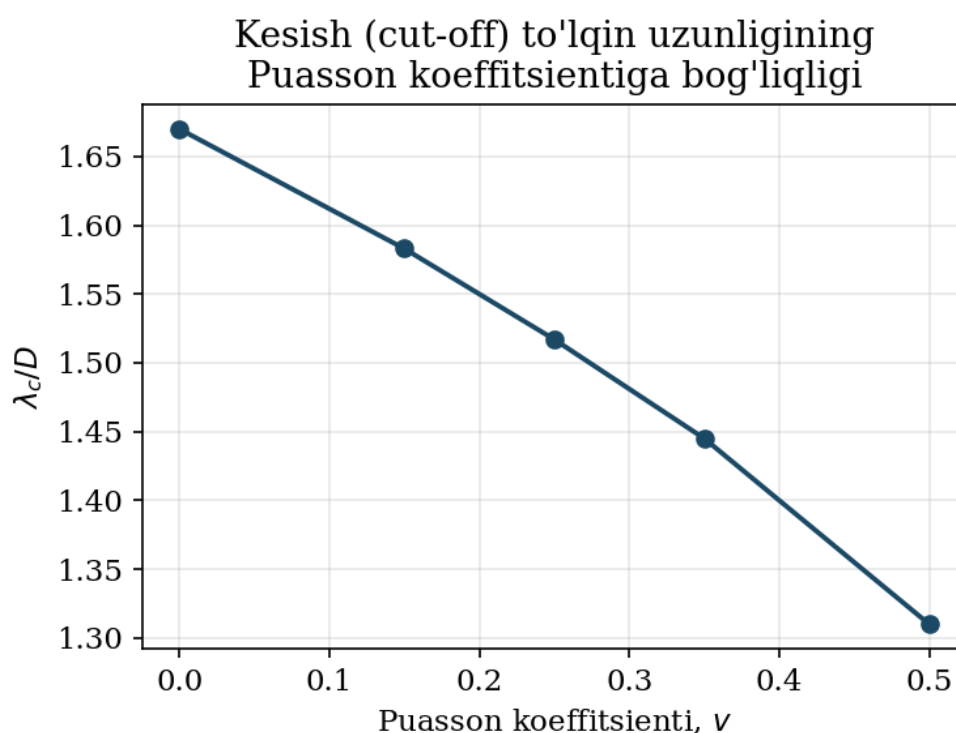
1-rasmdan ko'rinadiki, barcha egri chiziqlar uchun to'lqin uzunligi ortishi bilan fazaviy tezlik monoton ravishda ortib, ma'lum chegaraviy qiymatda ko'ndalang to'lqin tezligiga ($\nu = v_s$, ya'ni $\zeta_1 = 1$) yetadi va shu nuqtada uziladi — bu kesish (cut-off) to'lqin uzunligi λ_c hisoblanadi. λ_c dan katta to'lqin uzunliklari uchun so'nmaydigan to'lqin tarqala olmaydi. $\lambda \rightarrow \infty$ chegarasida hisoblangan qiymatlar (6)-tenglama — klassik Røley nisbati — bilan yuqori aniqlikda mos keldi (masalan, $\nu = 0,25$ uchun $v/v_s = 0,9194$, $\nu = 0,50$ uchun $v/v_s = 0,9553$), bu qo'llanilgan sonli usulning ishonchliligini tasdiqlaydi.

Kesish to'lqin uzunligi nisbati λ_c/D ning Puasson koefitsientiga bog'liqligi 1-jadvalda keltirilgan. Kesish shartini ($\zeta_1 \rightarrow 1$ limitida analitik tarzda soddalashtirib) to'g'ridan-to'g'ri yechish orqali quyidagi qiymatlar olindi va ular M.

Biot tomonidan [1] jadval ko'rinishida berilgan natijalar bilan solishtirildi:

ν	λ_c/D [1] (Biot, 1952)	λ_c/D (ushbu ishda hisoblangan)
0	1,670	1,668
0,15	1,583	1,583
0,25	1,517	1,519
0,35	1,445	1,446
0,50	1,310	1,316

1-jadval. Kesish to'lqin uzunligi nisbatining Puasson koeffitsientiga bog'liqligi: manba [1] va ushbu tezisda mustaqil hisoblangan qiymatlarning solishtirilishi (farq barcha holatlarda 0,2% dan kam)

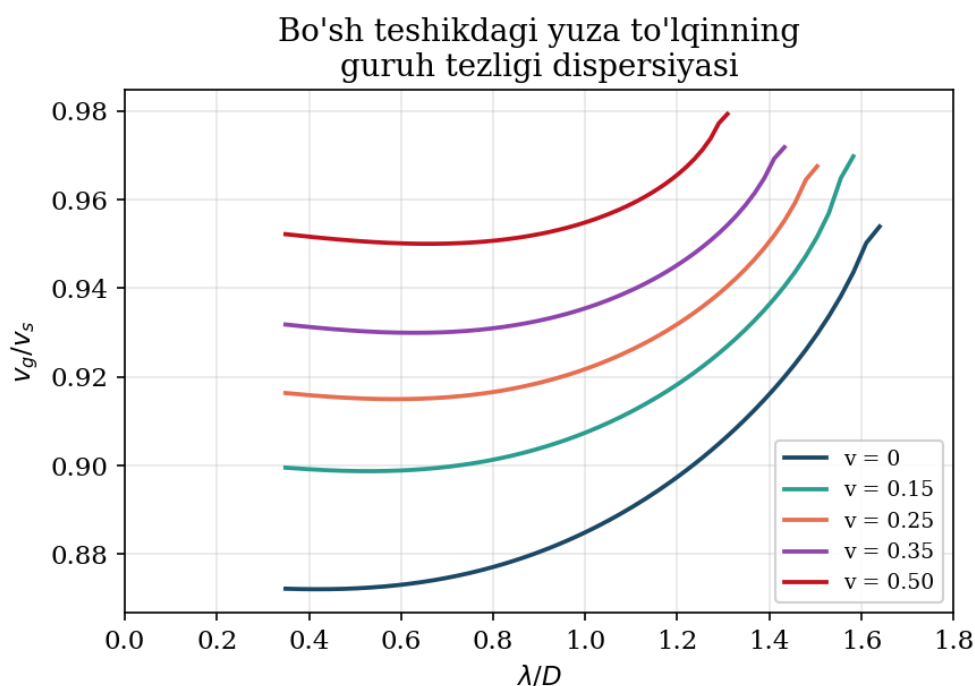


2-rasm. Kesish to'lqin uzunligi nisbati λ_c/D ning Puasson koeffitsienti ν ga bog'liqligi

Jadval va 2-rasmdan ko'rinib turibdiki, λ_c/D nisbati Puasson koeffitsienti ortishi bilan monoton kamayadi ($\nu = 0$ da 1,67 dan $\nu = 0,5$ da 1,31 gacha). Bu fizik jihatdan aksial-simmetrik deformatsiyaning aylana yo'nalishidagi qo'shimcha

kuchlanishlar hosil qilishi va bu kuchlanishlarning muhitning effektiv qattiqligini oshirishi bilan izohlanadi; to'lqin uzunligi (demak, to'lqin ta'sirining chuqurligi) ortgan sari bu effekt kuchayib boradi.

Guruh tezligi (7)-formula bo'yicha sonli differensiallash yo'li bilan hisoblanib, 3-rasmda tasvirlangan.



3-rasm. Bo'sh teshikdagi yuza to'lqinining guruh tezligi dispersiyasi

3-rasmdan ko'rinadiki, guruh tezligi ham fazaviy tezlik singari to'lqin uzunligi ortishi bilan monoton o'sib boradi, biroq uning qiymati fazaviy tezlikdan sezilarli darajada past (masalan, $\nu = 0$ uchun kesish nuqtasiga yaqin sohada $v_g/v_s \approx 0,965$, fazaviy tezlik esa 1 ga teng). Bu — dispersiv to'lqin tizimlariga xos xususiyat bo'lib, energiyaning tarqalish tezligi fazaviy tezlikdan farqlanishini ko'rsatadi.

Xulosa

Ushbu tezisda M. Biotning [1] klassik natijalariga asoslanib, bo'sh silindrsimon teshik yuzasida tarqaladigan aksial-simmetrik elastik yuza to'lqinlarining dispersion tenglamasi mustaqil ravishda sonli usulda (Python, SciPy) yechildi. Olingan natijalar — jumladan kesish to'lqin uzunligi jadvali va Røley chegaraviy nisbatlari — manba maqolada keltirilgan qiymatlar bilan 0,2% dan kam farq bilan mos keldi, bu qo'llanilgan hisoblash metodologiyasining ishonchliligini

tasdiqlaydi. Teshik diametrining chekliligi tufayli yuzaga keladigan dispersiya va kesish to'lqin uzunligining mavjudligi — klassik yarim cheksiz muhit modelida uchramaydigan, faqat chekli geometriyaga xos hodisa ekanligi ko'rsatildi. Olingan natijalar burg'ilash quduqlarida akustik karotaj, quvur konstruksiyalarida to'lqin diagnostikasi kabi amaliy masalalarda, shuningdek muallifning silindrsimon qobiqlardagi elastik va qovushqoq-elastik to'lqin jarayonlarini o'rganishga bag'ishlangan dissertatsiya tadqiqotida nazariy asos sifatida qo'llanilishi mumkin.

Adabiyotlar

1. Biot M. A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // Journal of Applied Physics. — 1952. — Vol. 23, No. 9. — P. 997–1005.
2. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. — 1904. — Vol. 203. — P. 1–42.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. — 248 с.