

**SUYUQLIK BILAN TO'LDIRILGAN SILINDRIK QOBIQDA
QAYTUVCHI TO'LQINLARNING DISPERSIYA QONUNIYATLARINI
CHEGARAVIY HOLATDA TADQIQ ETISH**

¹Mirzoyeva G.T., ²Ibrohimov A.A., ³Nabiyev B.E., ³Tohirova N.T.,

¹Buxoro davlat texnika universiteti, aniq fanlar kafedrası assistenti,

gmirzoyeva@bstu.uz , <https://orcid.org/0009-0007-7663-9301>

² Buxoro shahridagi №19-ixtisoslashtirilgan umumta'lim maktabi,

matematika fani o'qituvchisi, azizibrohimov554@gmail.com

³Jizzax davlat pedagogika universiteti qoshidagi akademik litsey fizika fani

o'qituvchisi nabiyevbahodir980@gmail.com

⁴Buxoro tuman 14-umumta'lim maktabi o'qituvchisi ,

tohirovanigina2@gmail.com

Kirish

Biot [1] silindrik teshikni to'ldirgan suyuqlikdagi to'lqinlarni qattiq jism bilan o'zaro ta'sirini hisobga olishdan oldin, avval mustaqil holda — ya'ni qattiq jismning ta'siri chegaraviy shart orqali ikkita cheklama holatga soddalashtirilgan holda — tahlil qiladi: (a) suyuqlik cheksiz qattiq devor ichida (radial siljish nolga teng) va (b) suyuqlik ustuni erkin sirtga ega (bosim nolga teng). Quyida shu ikki chegaraviy holatdan olingan aniq natija — qaytgan (konussimon) to'lqinlarning dispersiya egri chiziqlari Bessel funksiyalarining nollari orqali analitik shaklda ifodalanishi va chekli zichlik nisbatidagi umumiy masala shu ikki chegara orasida joylashishi — yagona, yakunlangan tezis sifatida shakllantiriladi.

1. Masalaning qo'yilishi

Teshik ($D = 2a$ diametrli) zichligi ρ va tovush tezligi c ga ega suyuqlik bilan to'ldirilgan. Osesimmetrik siljish potentsiali φ quyidagi to'lqin tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Uning z bo'ylab tarqaladigan, l to'lqin soniga va ω burchak chastotaga ega yechimi ikki shaklda bo'ladi — fazoviy tezlik $\zeta = v/c$ ($v = \omega/l$) birdan katta yoki kichik bo'lishiga qarab:

$$\begin{aligned} \varphi &= J_0 \left[r \left(\frac{\omega^2}{c^2} - l^2 \right)^{1/2} \right] e^{i(lz - \omega t)} \quad (\zeta > 1), \quad \varphi \\ &= I_0 \left[r \left(l^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2} \right] e^{i(lz - \omega t)} \quad (\zeta < 1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Birinchi yechim ($\zeta > 1$) teshik devoridan qaytadigan **konussimon to'lqinlarga**, ikkinchisi ($\zeta < 1$) Stounli tipidagi to'lqinlarga mos keladi. Suyuqlikning radial siljishi $R' = \partial \varphi / \partial r$ orqali, bosim va siljish nisbati esa $r = a$ da quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{p}{R'} = -\frac{a^2 \rho}{l} \frac{J_0[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}]}{(\zeta^2 - 1)^{1/2} J_1[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}]} \quad (\zeta > 1) \quad (3.5)$$

2. Ikki chegaraviy holat: qattiq devor va erkin sirt

Qattiq devor. Agar suyuqlik qo'zg'almas qattiq devor ichida bo'lsa, radial siljish chegarada nolga teng bo'ladi: $R' = 0$. Bu shart (3.5) dan quyidagi tenglamani beradi:

$$(\zeta^2 - 1)^{1/2} J_1[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}] = 0 \quad (3.6)$$

Bu tenglamaning $\zeta = 1$ ildizi o'qqa perpendikulyar tekis to'lqinlarga mos keladi, qolgan ildizlari esa

$$la(\zeta^2 - 1)^{1/2} = \beta_n \quad (3.7)$$

shartini qanoatlantiradi, bunda β_n — birinchi turdagi J_1 Bessel funksiyasining nolga teng bo'lmagan musbat nollari. Har bir β_n uchun (3.7) ζ ni λ/D ning funksiyasi sifatida giperbola shaklidagi egri chiziqni beradi.

Erkin sirt. Agar suyuqlik ustuni erkin sirtga ega bo'lsa (bosim chegarada

nolga teng), mos shart

$$J_0[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}] = 0 \quad (3.8)$$

ko'rinishini oladi — bu ham J_0 Bessel funksiyasi nollari orqali aniqlanadigan giperbolalar oilasini beradi.

Ikkala tenglama (3.7) va (3.8) klassik matematik jadvallarda aniq berilgan, tekshirilgan sonli qiymatlarga ega. J_1 va J_0 funksiyalarining dastlabki uchta musbat noli 1-jadvalda keltirilgan.

n	$\beta_n (J_1(\beta_n) = 0, \beta_n \neq 0)$	$\alpha_n (J_0(\alpha_n) = 0)$
1	3,8317	2,4048
2	7,0156	5,5201
3	10,1735	8,6537

3. Chekli zichlik nisbatida oraliq tarqalish

Qattiq jismning elastikligi hisobga olinganda, qaytgan to'lqinlarning umumiy dispersiya tenglamasi (2-bo'limdagi natijalar va standart Bessel ayniyatlaridan foydalanib) quyidagicha topiladi ($\zeta > 1$ uchun):

$$4(1 - \zeta_1^2)^{1/2} \left[\frac{1}{ka} + \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)} \right] - \frac{(2 - \zeta_1^2)^2 (1 - \zeta_2^2)^{1/2}}{ma} \quad (3.13)$$

$$- \frac{(2 - \zeta_1^2)^2 K_0(ka)}{(1 - \zeta_2^2)^{1/2} K_1(ka)} = - \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\zeta_1^4}{(\zeta^2 - 1)^{1/2}} \frac{J_0[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}]}{J_1[la(\zeta^2 - 1)^{1/2}]}$$

bunda $\zeta_1 = v/v_s$, $\zeta_2 = v/v_c$, ρ_1 — qattiq jism zichligi. Manba [1] ga ko'ra, (3.13) tenglamaning qaytgan to'lqin tarmoqlari zichlik nisbati ρ/ρ_1 ning ikki chegaraviy qiymatida yuqoridagi ikki mustaqil holatga aylanadi: $\rho/\rho_1 \rightarrow 0$ (yengil suyuqlik) da tenglama (3.6)–(3.7) egri chiziqlariga, $\rho/\rho_1 \rightarrow \infty$ (og'ir suyuqlik) da esa tenglama (3.8) egri chiziqlariga yaqinlashadi. Fizik jihatdan bu tabiiy: suyuqlik zichligi qattiq jismnikiga nisbatan juda kichik bo'lganda, uning inertsiasini qattiq jism devorini deyarli siljita olmaydi va devor suyuqlik uchun amalda qattiq bo'lib qoladi; aksincha, suyuqlik zichligi juda katta bo'lganda, qattiq jismning qarshiligi suyuqlik inertsiasini oldida ahamiyatsiz bo'lib qoladi va

devor suyuqlik uchun amalda erkin sirtga aylanadi.

Natija. Suyuqlik bilan to'ldirilgan silindrik teshikdagi qaytgan (konussimon) to'lqinlarning umumiy dispersiya tenglamasi (3.13) ikkita aniq, mustaqil analitik yechimga ega chegaraviy holat orasida joylashadi: $\rho/\rho_1 \rightarrow 0$ da qattiq devor sharti (3.6)–(3.7) ga, $\rho/\rho_1 \rightarrow \infty$ da erkin sirt sharti (3.8) ga aylanadi; bu ikkala chegaraviy tenglama navbati bilan J_1 va J_0 Bessel funksiyalarining musbat nollari orqali to'liq aniqlanadi va ularning sonli qiymatlari (1-jadval) qattiq matematik asosga ega bo'lib, har biri $la(\zeta^2 - 1)^{1/2}$ ifodasi o'zgarmas qiymatga teng bo'lgan shartdan hosil bo'lgan giperbola egri chizig'ini beradi. Shu tariqa, chekli zichlik nisbatidagi to'liq masala (3.13) — qattiq jism va suyuqlik o'zaro ta'sirining natijasi sifatida — shu ikki analitik jihatdan aniq chegara orasida uzluksiz o'zgaruvchi dispersiya tarmoqlarini hosil qiladi.

Xulosa

Biot [1] tahlili asosida shakllantirilgan ushbu tezis quyidagini isbotlaydi: suyuqlik bilan to'ldirilgan silindrik teshikdagi qaytgan to'lqinlarning tarqalish shartlari ikkita analitik jihatdan aniq chegaraviy holat — qattiq devor (Bessel funksiyasi J_1 nollari) va erkin sirt (Bessel funksiyasi J_0 nollari) — orqali to'liq tavsiflanadi, chekli zichlik nisbatidagi haqiqiy fizik masala esa (3.13) tenglama orqali shu ikki chegara oralig'ida uzluksiz interpolyatsiya qiladi. Ushbu natija silindrik to'lqin o'tkazgichlarning chegaraviy xususiyatlarini aniqlashda, xususan burg'ilash quduqlari geofizikasi va akustik o'lchov asboblari loyihalashda muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi [2]–[5].

Adabiyotlar

1. M. A. Biot, "Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid," *Journal of Applied Physics*, vol. 23, no. 9, pp. 997–1005, 1952.
2. J. H. Rosenbaum, "Synthetic Microseismograms: Logging in Porous Formations," *Geophysics*, vol. 39, no. 1, pp. 14–32, 1974.

3. L. Tsang and D. Rader, "Numerical Evaluation of the Transient Acoustic Waveform Due to a Point Source in a Fluid-Filled Borehole," *Geophysics*, vol. 44, no. 10, pp. 1706–1720, 1979.
4. M. D. Sharma and M. L. Gogna, "Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore in a Liquid-Saturated Porous Solid," *Geophysical Journal International*, vol. 103, no. 1, pp. 47–54, 1990.
5. A. N. Norris, "The Speed of a Tube Wave," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, no. 1, pp. 414–417, 1990.