

HILFER TURIDAGI MAKSIMUMGA EGA BO'LGAN KASR TARTIBLI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMALA

Shukurova Mashhura Dilshod qizi

Annotatsiya: Ushbu tezisda Hilfer turidagi maksimumga ega bo'lgan kasr tartibli integro-differensial tenglamalar nazariyasi va ularning yechim metodlari chuqur tahlil qilinadi. Kasr tartibli integro-differensial tenglamalar ko'p sohalarda murakkab jarayonlarni modellashda ko'p qo'llaniladi. Hilfer turidagi kasr operatorlari esa kasr tartibli differensial tenglamalarga yangi nazariy yondashuvlarni olib kirib, ularning sifatli xususiyatlarini o'rganishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Hilfer kasr operatori, kasr tartibli integro-differensial tenglamalar, siquvchi akslantirish metodi, matematik modelashtirish.

Kasr tartibli integro-differensial tenglamalar so'nggi yillarda matematikaning faol rivojlanayotgan yo'nalishlaridan hisoblanadi. Ular ko'p jihatdan oddiy differensial tenglamalardan farq qilib, o'zida kasr tartibli hosilalar va integral operatorlarini mujassamlashtiradi. Ayniqsa Hilfer tomonidan taqdim etilgan kasr tartibli operatorlar, turli xil operatorlar orasida iqtisodiy, mexanik va biomeditsina sohalaridagi modellarni yanada qulay va aniq ifodalashga imkon beradi. Hilfer operatori Rieman-Liuvill va Kaputo operatorlari orasidagi umumlashma hisoblanib, uning xossalari tenglamalarda yechimlarning sifatini ta'minlashda katta rol o'ynaydi [1].

Kasr tartibli integro-differensial tenglamalar sistema dinamikasidagi xotira ta'siri, vaqtga bog'liq o'zgarishlarning noan'anaviy o'lchamlarini tushuntirishda qulay vositadir. Shu sababli ularga iqtisodiyot, fizik jarayonlar, biologik tizimlar va boshqalarda keng qo'llaniladi. [2].

Kasr tartibli differensial tenglamalarda noma'lum funksiyaning hosilasi butun sonli emas, balki ixtiyoriy haqiqiy tartibli bo'lishi mumkin. Bunday tenglamalarni o'rganishda Riman-Liuvill, Kaputo va Hilfer kasr tartibli

hosilalaridan foydalaniladi.

Hilfer kasr tartibli hosilasi Riman–Liuvill va Kaputo tipidagi hosilalarni umumlashtiruvchi operator hisoblanadi. Uning umumiy ko‘rinishi:

$$D_{-}(a+)^{(\alpha,\beta)} x(t) = I_{-}(a+)^{(\beta(1-\alpha))} \frac{d}{dt} I_{-}(a+)^{((1-\beta)(1-\alpha))} x(t),$$

bu yerda $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$.

Bu yerda $I_{-}(a+)^{\mu}$ — Riemann–Liouville kasr tartibli integral operatori, α — kasr tartib, β — Hilfer operatorining turini aniqlovchi parametr.

$\beta = 0$ bo‘lganda Hilfer hosilasi Riman–Liuvill hosilasiga, $\beta = 1$ bo‘lganda esa C Kaputo hosilasiga mos keladi.

Maksimumga ega bo‘lgan Hilfer turidagi kasr tartibli integro-differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishini quyidagicha yozish mumkin:

$$D_{-}(a+)^{(\alpha,\beta)} x(t) = f(t, x(t), \max_{a \leq s \leq t} x(s)) + \lambda \int_a^t K(t,s)x(s) ds.$$

Bu yerda:

$x(t)$ — noma'lum funksiya;

f — berilgan uzluksiz funksiya;

$K(t,s)$ — integral yadro;

λ — haqiqiy parametr;

$\max_{a \leq s \leq t} x(s)$ — $x(s)$ funksiyaning $[a, t]$ kesmadagi maksimum qiymati.

Mazkur tenglamaning asosiy xususiyati shundaki, t nuqtadagi yechim faqat $x(t)$ qiymatiga emas, balki $[a, t]$ kesmadagi funksiyaning eng katta qiymatiga ham bog'liq bo'ladi.

Integral tenglamaga keltirish:

Tegishli boshlang'ich shart yordamida tenglamani integral ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda yechim quyidagi umumiy ko'rinishga ega bo'ladi:

$$x(t) = x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)} f(s, x(s), \max_{a \leq \xi \leq s} x(\xi)) ds \\ + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)} \left[\int_a^s K(s, \xi) x(\xi) d\xi \right] ds.$$

Bu yerda $\Gamma(\alpha)$ — Gamma funksiyasi, $x_0(t)$ esa boshlang'ich shartdan kelib chiqadigan funksiya.

Siquvchi akslantirish metodi:

Integral tenglamaning o'ng tomonini T operator orqali belgilaymiz:

$$(Tx)(t) = x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)} f(s, x(s), \max_{a \leq \xi \leq s} x(\xi)) ds \\ + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)} \left[\int_a^s K(s, \xi) x(\xi) d\xi \right] ds.$$

Shunda berilgan masala quyidagi qo'zg'almas nuqta tenglamasiga keladi:

$$x = Tx.$$

$C[a,b]$ fazosida quyidagi norma kiritiladi:

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Agar T operatori uchun

$$\|Tx - Ty\| \leq q\|x - y\|,$$

$$0 < q < 1$$

tengsizlik bajarilsa, u holda T siquvchi akslantirish deyiladi.

Banaxning siquvchi akslantirish prinsipiga ko'ra, T operatorining yagona qo'zg'almas nuqtasi mavjud bo'ladi. Demak, tegishli shartlar bajarilganda Hilfer turidagi maksimumga ega bo'lgan kasr tartibli integro-differensial tenglamaning yagona yechimi mavjud bo'ladi.

Hilfer operatoriga asoslangan maximum prinsipi qo'llanganda, tenglama yechimlarining turli funksiya fazosida barqarorligi, cheklanishi va sifatli o'zgarishlari tahlil qilinadi. Bu, ayniqsa, progressiv tizimlar, vaqtga bog'liq murakkab jarayonlarni o'rganishda samarali usullardan biridir [3].

Hilfer operatoriga bog'liq kasr tartibli integro-differensial tenglamalarni yechish murakkab matematik jarayon hisoblanadi. Ularni hal qilishda injenerlik, matematik model ishlab chiqishda quyidagi metodlar keng qo'llaniladi:

Birinchidan, analitik metodlar mavjud bo'lib, ularning yordamida yechimlarni xususiy holatlarda olish mumkin. Masalan, Hilfer operatorlari orqali olingan kasr tenglamalarda transformatsiya metodlaridan biri sonli metodlar keng qo'llaniladi. Bu usul Hilfer operatorining o'ziga xos integralligini hisobga olib sonli algoritmlar asosida yechim topishni uning umumlashgan yechimlar ko'lamini va aniqligini oshiradi.

Kasr tartibli integro-differensial tenglamalar yechimlarining uzluksizligi

ko'p jihatdan Hilfer operatorining parametrlariga va tenglama strukturasi shakliga bog'liq. Ularning o'zgarmasligi va funksional sifatlari ko'plab matematik shartlar asosida o'rganiladi. Shuningdek, yechimlarning tebranishlari va ulardan kelib chiqadigan ta'sirlar amaliy sohalaridagi tizimlar faoliyatiga to'g'ridan-to'g'ri ta'sir ko'rsatadi [4].

Hilfer operatoriga asoslangan kasr tartibli integro-differensial tenglamalar ko'plab ilmiy va muhandislik sohalarida qo'llaniladi. Bular orasida mexanika, fizika, biologiya, iqtisodiyot va boshqaruv nazariyasi bor. Masalan, materiallarning xatti-harakatlarini modellashtrishda Hilfer operatori yordamida hosilalarning moslashuvchanligi va vaqtga bog'liq o'zgarishlar aniqroq tavsiflanadi.

Xulosa

Hilfer turidagi maksimumga ega bo'lgan kasr tartibli integro-differensial tenglamalar zamonaviy matematik analiz va differensial tenglamalar nazariyasining muhim yo'nalishlaridan biridir. Bunday tenglamalarda kasr tartibli hosila bilan bir qatorda integral operatorlarning ham ishtirok etishi jarayonlarning xotira va nolokallik xususiyatlarini matematik jihatdan ifodalash imkonini beradi. Hilfer operatori Riman–Liuvill va Kaputo turidagi kasr tartibli hosilalarni umumlashtiruvchi operator sifatida qaraladi. Shu sababli uning yordamida turli boshlang'ich, chegaraviy va chiziqli bo'lmagan masalalarni yagona yondashuv asosida tadqiq qilish mumkin. O'zbekistonlik tadqiqotchilar tomonidan ham Hilfer operatori qatnashgan kasr tartibli tenglamalarning yechiluvchanligi, teskari va chiziqli bo'lma masalalari bo'yicha ilmiy natijalar olingan. Xususan, Qodirkulov B.J. va Jalilov M.A. 2022-yilda Hilfer operatori qatnashgan nolokal aralash tipdagi kasr tartibli tenglama uchun teskari masalani tadqiq qilganlar.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Qodirkulov B.J., Jalilov M.A. Hilfer operatori qatnashgan nolokal aralash tipdagi kasr tartibli tenglama uchun qo'yilgan teskari masala. — NamDU ilmiy axborotnomasi, 2022.

www.namdu.uz

2. Qodirkulov B.J., Jalilov M.A. Hilfer operatori qatnashgan to'rtinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal masala. — Matematika instituti ilmiy axborotnomasi, 2021.
3. Jalilov M.A., Kayumova G.A. Hilfer operatori qatnashgan aralash tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masala. — AIP Conference Proceedings, 2021.
4. Qodirkulov B.J., Kayumova G.A. Hilfer operatori qatnashgan ikkinchi tartibli aralash tipdagi tenglama uchun nolokal masala. — Matematika instituti ilmiy axborotnomasi, 2021.
5. Jalilov M.A. Kasr tartibli differensial operator qatnashgan aralash tipdagi tenglamalar uchun masalalar. — Matematika instituti ilmiy axborotnomasi, 2019.
6. Xusainov X. Hilfer ma'nosidagi kasr hosilali differensial tenglamalarni Duhamel prinsipi yordamida yechish. — Matematika, mexanika va intellektual texnologiyalar respublika ilmiy konferensiyasi materiallari, Toshkent, 2023.